Mat3 Blatt 7

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

25 Gauß'sche Normalverteilung.

> Viele Universitäten führen Aufnahmeprüfungen durch, um Studienplätze zu vergeben.
> Angenommen, die (zufällige) Punktzahl, die in einer solchen Aufnahmeprüfung erzielt wird,
> lässt sich (in einer gegebenen Zielpopulation) gut durch eine Normalverteilung mit Parametern $\mu = 527$ und $\sigma^2 = 12544$ modellieren.
>
> a) Berechnen Sie unter dieser Verteilungsannahme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Punktzahl von mehr als 500 erzielt wird.

$\mu = 527$ ist der Mittelwert
$\sigma = \sqrt{12544} = 112$ ist die Standartabweichung
$X = 500$ der Wert an dem wir das Integral trennen wollen.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{500 - 527}{112} = \frac{-27}{112} \approx -0.24$$

$$\mathbb{P}(X > 500) = 1 - \phi(Z) = 1 - \phi(-0.24) = \phi(0.24) = 0.5948$$

ca. 59,5 % der Leute erreichen mehr als 500 Punkte.

2/2

> b) Wie viele Punkte müssen unter der angegebenen Verteilungsannahme mindestens erzielt werden, damit man unter den (vom Modell her erwarteten) 5% höchsten Punktzahlen landet?

$$\mathbb{P}(X < x) = 0.95 \Rightarrow Z \approx 1.645$$

$$x = Z \cdot \sigma + \mu = 1.645 \cdot 112 + 527 \approx 711.24$$

Man braucht ca. 712 Punkte, um unter den besten 5 % zu sein.

2/2

26. Exponentialverteilung.

> Angenommen, in einer gegebenen Population von Flugreisenden ist die (zufällige) Zeitspanne zwischen dem Kauf des Flugtickets und dem Abflug exponentialverteilt.
> Zusätzlich sei bekannt, dass diese Zeitspanne in der betrachteten Population im Mittel genau 15 Tage beträgt.
> Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem bzw. einer zufällig aus der betrachteten Population ausgewählten Flugreisenden die Zeitspanne zwischen dem Kauf des Flugtickets und dem Abflug weniger als zehn Tage beträgt.

$\mathbb{E}(X) = 15$ Mittelwert
$\lambda = \frac{1}{15}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 10) &= 1 - \exp(-\lambda \cdot 10) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{10}{15}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &\approx 1 - 0.5134 \\ &\approx 0.4866\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Flugreisender weniger als 10 Tage vor Abflug das Ticket kauft, beträgt ungefähr: 48.7%

4/4

27. Berechnung von Erwartungswerten.

> Im Rahmen eines Charity-Events findet die folgende Aktion statt.
> Ein(e) Prominente(r) wirft eine faire Münze so lange, bis das erste Mal ”Kopf“ fällt.
> Falls dies beim n-ten Wurf geschieht, so spendet der/die Prominente 2^n Euro an eine wohltätige Organisation und die Aktion ist beendet.
>
> a) Es bezeichne X die (zufällige) Spieldauer (diskret gemessen in der Anzahl an stattfindenden Münzwürfen).
> Berechnen Sie die Verteilung von X.
> Hinweis: Die Würfe können als unabhängig voneinander angenommen werden.

Lösung:

Wir suchen den ersten Treffer im n-ten Versuch mit $p = 0.5$

Warum?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \binom{n-1}{1-1} \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p^1 \\ &= (1-0.5)^{n-1} \cdot 0.5 \\ &= 0.5^{n-1} \cdot 0.5 \\ &= 0.5^n\end{aligned}$$

0/1

> b) Es bezeichne Y die zu Stande kommende (zufällige) Spende (in Euro).
> Stellen Sie Y als eine Transformation von X dar; d. h., finden Sie eine Funktion g, so dass Y = g(X) gilt. 1

"so spendet der/die Prominente 2^n Euro" und X gibt die Anzahl der Würfe bis zum ersten Kopf an.

$$Y = g(X) = 2^X$$

1/1

> c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

$X \sim Geo(p = 0.5)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$$

> d) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(g(Y)) \\ &= \mathbb{E}(2^X) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 0.5^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot 0.5)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\ &= \infty\end{aligned}$$

1/1

28. Multiple Select-Aufgabe.

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) definiert ist. Betrachten Sie unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen.
>
> a) Falls X eine Lebesguedichte besitzt und diese Lebesguedichte unbeschränkt ist, so ist es ausgeschlossen, dass der Erwartungswert von X (in $\mathbb{R}$) existiert.

Die Lebesguedichte der Normalverteilung ist nicht unbeschränkt!

Falsch z. B die Normalverteilung ist unbeschränkt, aber sie hat trotzdem Erwartungswerte.

0/1

> b) Falls X nur endlich viele Werte annehmen kann und $E[X] = 0$ gilt, so sind genau die Hälfte der Werte, die X annehmen kann, positiv.

Falsch

Es kommt auf die Wahrscheinlichkeiten an, nicht auf die Anzahl der positiven Werte ob $\mathbb{E}(X) = 0$ ist. Habt Ihr ein Gegenbeispiel?

Dazu wenn $X|2 = 1$ ist wie kann dann gibt es keine genaue Hälfte. 0,5/1

?

> c) Falls X eine Lebesguedichte besitzt und diese Lebesguedichte achsensymmetrisch (zur Null-Achse) ist, so gilt $E[X] = 0$.

Wahr Die Aussage ist falsch. Bsp. die Cauchy-Verteilung.

achsensymmetrisch heißt $f(x) = f(-x)$ daher gilt

$$\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\int_{0}^{\infty} x f(x) dx$$

und so

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0$$

0/1

> d) Falls X diskret verteilt ist und $E[X] = 0$ gilt, so gilt auch $E[2X] = 0$.

Wahr, da

$$\mathbb{E}(2X) = 2 \cdot \mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(X)$$

1/1

12,5/16