Kapitel 4
Kennzahlen von Verteilungen

Thorsten Dickhaus

Universität Bremen
Institut für Statistik

Mathematik 3: Stochastik
Universität Bremen, Fachbereich 03, SoSe 2025

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Eingangsbeispiele zum Erwartungswert (I)

Wir betrachten den einfachen Würfelwurf mit einem homogenen Würfel und stellen die Frage:
"Was würfelt man im Mittel?"

Eine plausible Antwort erscheint der Mittelwert der möglichen Werte zu sein:

$$\begin{aligned} 3{,}5 &= \frac{21}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \\ &= \frac{\sum_{x\in\mathcal{X}} x}{|\mathcal{X}|}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei X mit Wertebereich $\mathcal{X}$ die Zufallvariable bezeichne, die das Ergebnis des Würfelwurfs repräsentiert.

Eingangsbeispiele zum Erwartungswert (II)

Wir stellen beim Zahlenlotto ”6 aus 49” die analoge Frage:
”Wie viele Richtige hat man im Mittel?”

Anwendung der Formel in (1) mit $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ würde das Ergebnis $21/7 = 3$ liefern.

Dieses ist aber unplausibel, da es unserer Alltagserfahrung widerspricht.

Wir müssen die Ergebnisse mit ihren W’keiten gewichten!

Definition: (Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen)

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *eine diskrete Zufallsvariable mit (höchstens abzählbarem) Wertebereich* $\mathcal{X} = X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ *und Zähldichte* f_X*.*

Falls

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} |x| \cdot \mathbb{P}(X = x) < \infty, \tag{2}$$

so ist der Erwartungswert von X *definiert als*

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot f_X(x). \tag{3}$$

Zusatz zur Definition

Für nicht-negatives, diskret verteiltes X, d. h., $X(\Omega) \subseteq [0, \infty)$, definiert man $\mathbb{E}[X] \in [0, \infty]$ auch dann noch durch (3), falls (2) nicht gilt.

In letzterem Falle ist dann $\mathbb{E}[X] = \infty$.

Falls $\mathbb{E}[X]$ in $\mathbb{R}$ existiert, so nennen wir X integrierbar.

Beispiele zum diskreten Erwartungswert (I)

Erstes Beispiel: Indikatorvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W'keitsraum und $A \in \mathcal{A}$ ein Ereignis.

Betrachte die Zufallsvariable $X = \mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ mit

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A).$$

Beispiele zum diskreten Erwartungswert (II)

Zweites Beispiel: Diskrete Gleichverteilungen

Sei $m = |\mathcal{X}| < \infty$ und $f_X(x) = \frac{1}{m}$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot f_X(x) = \frac{\sum\limits_{x \in \mathcal{X}} x}{m},$$

vgl. das Würfelwurf-Beispiel mit $m = 6$.

Beispiele zum diskreten Erwartungswert (III)

Drittes Beispiel: Binomialverteilungen

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ mit $f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)},
\end{aligned}$$

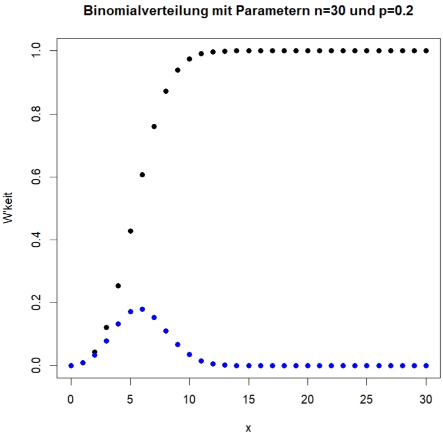
da $n-k = (n-1)-(k-1)$ ist.

Mit der Indextransformation $\ell = k - 1 \Leftrightarrow k = \ell + 1$ ergibt sich $k = 1 \Rightarrow \ell = 0$ und $k = n \Rightarrow \ell = n - 1$ und somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{(n-1)-\ell} \\ &= np \end{aligned}$$

wegen der Normierungsbedingung für die $\mathrm{Bin}(n-1, p)-$Verteilung.

Zusammengefasst: $\mathbb{E}[\mathrm{Bin}(n,p)] = n \cdot p$



Blau: Zähldichte von Bin$(n = 30, p = 0.2)$

Schwarz: Verteilungsfunktion von Bin$(n = 30, p = 0.2)$

Erwartungswert stetig verteilter Zufallsvariablen

Aus Analogiegründen hinsichtlich Zähl- und Lebesguedichten ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition: (Erwartungswert stetig verteilter Zufallsvariablen)

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ *eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Lebesguedichte* f_X, *die wir durch* $f_X(x) = 0$ *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{X}$ *fortsetzen.*

Falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty \tag{4}$$

ist, so definieren wir

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Zusatz zur Definition

Gilt $X(\Omega) \subseteq [0, \infty)$ und ist die absolute Integrierbarkeitsbedingung (4) verletzt, so setzen wir $\mathbb{E}[X] = \infty$.

Falls $\mathbb{E}[X]$ in $\mathbb{R}$ existiert, so nennen wir X integrierbar. (Dies ist analog zum diskreten Fall.)

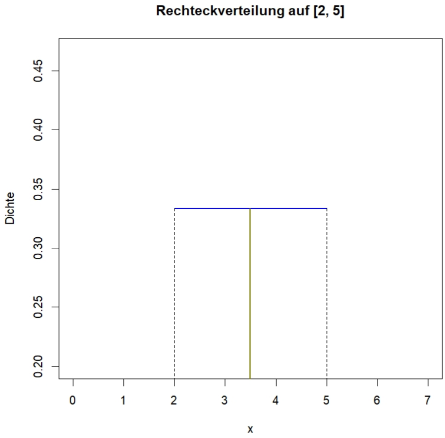
Beispiele zum stetigen Erwartungswert (I)

Erstes Beispiel: Rechteckverteilungen

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit Lebesguedichte f_X, gegeben durch $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, in Zeichen: $X \sim \mathrm{UNI}[a,b]$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2(b-a)}(a+b)(b-a) \\
&= \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$



Blau: Lebesguedichte

gestrichelt: Hilfslinien, Grün: Erwartungswert

Beispiele zum stetigen Erwartungswert (II)

Zweites Beispiel: Exponentialverteilungen

Sei X exponentialverteilt mit Intensitätsparameter $\lambda > 0$ mit Lebesguedichte f_X, gegeben durch $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \int_0^\infty x \exp(-\lambda x) dx.$$

Wir setzen

$$g(x) = x, \quad h'(x) = \exp(-\lambda x),$$

so dass

$$g'(x) = 1, \quad h(x) = -\frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda x),$$

und erhalten durch partielle Integration, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \lambda\left\{\left[-\frac{x}{\lambda}\exp(-\lambda x)\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \exp(-\lambda x)dx\right\} \\
&= \lambda\left\{0 + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda x)\right]_0^\infty\right\} = \lambda\left\{\frac{1}{\lambda^2}\right\} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Beispiele zum stetigen Erwartungswert (III)

Drittes Beispiel: Normalverteilungen

Sei X normalverteilt auf $\mathbb{R}$ mit Parametern μ und σ^2 und mit Lebesguedichte f_X, gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \; x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx.$$

Mit der Substitution

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma u + \mu$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma\ du$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \sigma\ du \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu
\end{aligned}$$

wegen der Normierungsbedingung für die $\mathcal{N}(0,1)-$Verteilung.

Berechnung des Erwartungswerts über die Verteilungsfunktion

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ eine (beliebige) reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X.

Falls die beiden Integrale

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx \quad \text{und} \\
I_2 &= \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(X \leq x)dx
\end{aligned}
$$

jeweils in $\mathbb{R}$ existieren, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = I_1 - I_2$$

Im Falle von Überlebenszeitverteilungen ist $I_2 = 0$.

Beispiel: Exponentialverteilungen (revisited)

Sei X exponentialverteilt mit Intensitätsparameter $\lambda > 0$ mit Survivalfunktion S_X, gegeben durch $S_X(t) = \exp(-\lambda t)$ für $t \geq 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= I_1 = \int_0^\infty S_X(t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda t)\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Diese Rechnung liefert (selbstverständlich) das gleiche Ergebnis wie zuvor, kommt aber ohne partielle Integration aus.

Rechenregeln für Erwartungswerte

Seien $X, Y, (X_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, deren (jeweilige) Erwartungswerte in $\mathbb{R}$ existieren.

Dann gilt:

a) Monotonie: Ist $X \leq Y$, so ist $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

b) Linearität: $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\sigma-$Additivität:
Sind alle $X_n \geq 0$ und ist $X = \sum_{n\geq 1} X_n$, so gilt
$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n]$.

d) Produktregel bei stochastischer Unabhängigkeit:
Sind X und Y stochastisch unabhängig, so existiert der Erwartungswert von $X \cdot Y$ und es gilt: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Beispiel: Symmetrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt symmetrisch um $\mu \in \mathbb{R}$ verteilt, wenn $X - \mu$ und $\mu - X$ die gleiche Verteilung(sfunktion) haben.

Angenommen, X ist symmetrisch um $\mu \in \mathbb{R}$ verteilt und $\mathbb{E}[X]$ existiert in $\mathbb{R}$.

Dann ist $\mathbb{E}[X] = \mu$, denn wir rechnen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X - \mu] &= \mathbb{E}[\mu - X] \\ \iff \mathbb{E}[X] - \mu &= \mu - \mathbb{E}[X] \\ \iff 2 \cdot \mathbb{E}[X] &= 2 \cdot \mu \\ \iff \mathbb{E}[X] &= \mu \end{aligned}$$

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Erwartungswert einer transformierten Zufallsvariable

Sie X eine reellwertige Zufallsvariable und sei $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{E}[g(X)]$ existiert.

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \mathcal{X}} g(x) \cdot f_X(x), & X \text{ diskret mit Zähldichte } f_X, \\ \int_{\mathcal{X}} g(x) \cdot f_X(x) dx, & X \text{ stetig mit Lebesguedichte } f_X. \end{cases}$$

Momente einer reellwertigen Zufallsvariable

Definition: (Momente)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}[X^k] \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq k \leq K$ existiert, für ein gegebenes $K \in \mathbb{N}$.

Dann heißt für $1 \leq k \leq K$

a) $m_k(X) := \mathbb{E}[X^k]$ *das k-te Moment von X.*

b) $\mu_k(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^k\right]$ *das k-te zentrale Moment von X.*

c) $M_k(X) := \mathbb{E}\left[|X|^k\right]$ *das k-te absolute Moment von X.*

Varianz und Standardabweichung

Definition: (Varianz und Standardabweichung)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}[X^k] \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq k \leq K$ existiert, für ein gegebenes $K \geq 2$.

Dann heißt

$$\mu_2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] =: \mathrm{Var}(X)$$

die Varianz von X und

$$SD(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

die Standardabweichung von X.

Schiefe einer reellwertigen Zufallsvariable

Definition: (Schiefe)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}[X^k] \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq k \leq K$ existiert, für ein gegebenes $K \geq 3$.

Setzen wir $\mathbb{E}[X] =: \mu$ und $0 < SD(X) =: \sigma$, so heißt

$$m_3\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-3} \cdot \mu_3(X)$$

die Schiefe von X.

Wölbung einer reellwertigen Zufallsvariable

Definition: ((Exzess-) Kurtosis)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}[X^k] \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq k \leq K$ existiert, für ein gegebenes $K \geq 4$.

Setzen wir $\mathbb{E}[X] =: \mu$ und $0 <$ SD$(X) =: \sigma$, so heißt

$$m_4\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-4} \cdot \mu_4(X)$$

die Wölbung (Kurtosis) von X und $m_4\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) - 3$ die Exzess-Kurtosis von X.

Der Verschiebungssatz

Sei X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz.

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &=: \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X],\end{aligned}$$

denn wir rechnen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X \cdot \mathbb{E}[X]\right] + \mathbb{E}^2[X] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}^2[X] + \mathbb{E}^2[X] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X]\end{aligned}$$

Beispiel: Varianz der Bernoulli-Verteilung

Sei $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$.

Dann ist $X^2 = X$, denn $0^2 = 0$ und $1^2 = 1$.

Damit ist $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(X = 1) = p$
und folglich nach Verschiebungssatz

$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p).$$

Beispiel: Momente der Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ besitzt Momente beliebiger Ordnung und es gilt

$$m_k\left(\mathrm{Exp}(\lambda)\right) = \frac{k!}{\lambda^k},\ k \in \mathbb{N},$$

denn:

$$m_k\left(\mathrm{Exp}(\lambda)\right) = \lambda \int_0^\infty x^k \exp(-\lambda x) dx$$

Mit der Substitution

$$u = \lambda x \Leftrightarrow x = \frac{u}{\lambda}$$
$$\frac{du}{dx} = \lambda \Rightarrow dx = \frac{du}{\lambda}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} m_k\left(\mathrm{Exp}(\lambda)\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k \exp(-u)du \\ &= \frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k} \end{aligned}$$

nach Definition der Euler'schen Gammafunktion.

Beispiel: Momente der Normalverteilung

Sei $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Wir berechnen

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

unter Verwendung der Substitution

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma u + \mu$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma du.$$

Es ergibt sich (unter Verwendung der Normierungsbedingung für $\mathcal{N}(0,1)$ sowie $\mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)] = 0$):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma u \mu \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du + \mu^2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Sei schließlich noch

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Wir setzen

$$g(u) = u \Rightarrow g'(u) = 1,$$
$$h'(u) = u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Rightarrow h(u) = -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

und somit ergibt sich durch partielle Integration:

$$I = \left[-u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 0 + \sqrt{2\pi}.$$

Daher ist die rechte Seite von (5) gleich

$$\sigma^2 + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2].$$

Folglich ergibt sich nach Verschiebungssatz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \sigma^2.$$

Zusammenfassend gilt für die Parameter der Normalverteilung:

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right] = \mu \ \text{ sowie } \ \mathrm{Var}\left(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right) = \sigma^2$$

https://www.bundesbank.de/resource/blob/644664/26eb6287c09eb598cabd7ed0d924b845/mL/0010-1999-vs-data.jpg

Beispiel: Momente der Poisson-Verteilung (I)

Sei $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Dann gilt (unter Verwendung der Normierung von $\mathrm{Poisson}(\lambda)$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k \exp(-\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k \exp(-\lambda) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{(\ell+1)!} (\ell+1) \exp(-\lambda) \\
&= \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} \exp(-\lambda) = \lambda
\end{aligned}$$

Beispiel: Momente der Poisson-Verteilung (II)

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k^2 \exp(-\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k^2 \exp(-\lambda) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{(\ell+1)!} (\ell+1)^2 \exp(-\lambda) \\
&= \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} (\ell+1) \exp(-\lambda) \\
&= \lambda \left\{\mathbb{E}[X] + 1\right\} = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich also:
$\mathrm{Var}\left(\mathrm{Poisson}(\lambda)\right) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Poisson}(\lambda)\right] = \lambda$

Rechenregeln für die Varianz

a) Eine Einpunkt-(Dirac-)Verteilung δ_a mit Punktmasse 1 im Punkte a besitzt die Varianz 0 für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

b) Seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen. Dann ist

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2 \cdot \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

c) Unter den Voraussetzungen von Teil b) ist $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$ für beliebige reelle Konstanten a und b. Insbesondere ist die Varianz translationsinvariant.

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Kovarianz von zwei Zufallsvariablen (I)

Seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit jeweils endlichen Varianzen.

Dann heißt

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

die Kovarianz von X und Y.

Ferner heißt dann

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \in [-1, 1]$$

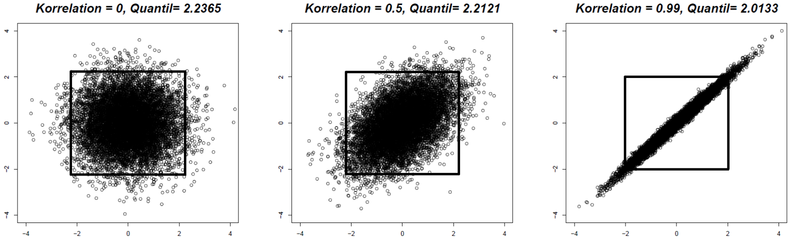
der Korrelationskoeffizient von X und Y.

Kovarianz von zwei Zufallsvariablen (II)

Falls $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$ gilt, so heißen X und Y unkorreliert.

Nebenbemerkung:
Falls $\mathrm{Var}(X) = 0$ oder $\mathrm{Var}(Y) = 0$ gilt, so ist $\rho(X, Y)$ undefiniert (und bedeutungslos).

Korrelation misst den Grad linearer Abhängigkeit



Eigenschaften der Kovarianz

Unter den Voraussetzungen von zuvor gilt:

a) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$

b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
(Symmetrie)

c) $\mathrm{Cov}(a+X, b+Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$
für alle reellen Konstanten a, b
(Translationsinvarianz)

Bilinearität der Kovarianz

Seien $X, Y, Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ drei Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen.

Dann gelten:

(i) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$
für alle reellen Konstanten a, b.

(ii)

$$\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$$
$$\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$$

Unkorreliertheit und stochastische Unabhängigkeit (I)

Seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen.

Dann gelten:

a) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] + \mathrm{Cov}(X, Y)$

b) $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

c) $X \perp\!\!\!\perp Y$ (also X und Y stochastisch unabhängig) $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

Unkorreliertheit und stochastische Unabhängigkeit (II)

Aus der Unkorreliertheit von X und Y kann im Allgemein **nicht** auf $X \perp\!\!\!\perp Y$ geschlossen werden.

Betrachte z. B. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y = X^2$. Dann sind X und Y nicht stochastisch unabhängig, denn es gilt etwa

$$\mathbb{P}(|X| < 1, X^2 > 1) = 0 \neq \mathbb{P}(|X| < 1) \cdot \mathbb{P}(X^2 > 1).$$

Nun ist aber $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) = 1$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{Cov}(X, X^2) \\
&= \mathbb{E}\left[X\left(X^2 - 1\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}[X] \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Es kann also passieren, dass X und Y zwar unkorreliert, aber nicht stochastisch unabhängig sind.

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Median einer Verteilungsfunktion

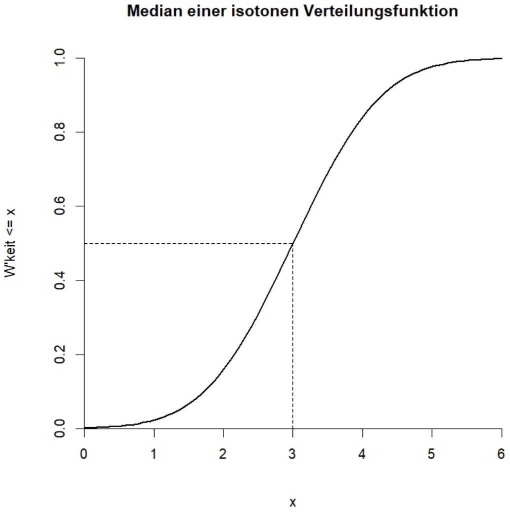
Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$. Dann heißt jeder Wert x_{med} mit der Eigenschaft

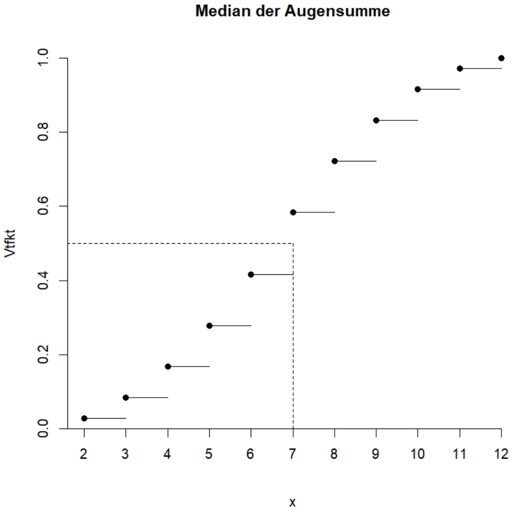
$$F(x_{\text{med}}) \geq 1/2, \qquad \lim_{x \uparrow x_{\text{med}}} F(x) \leq 1/2$$

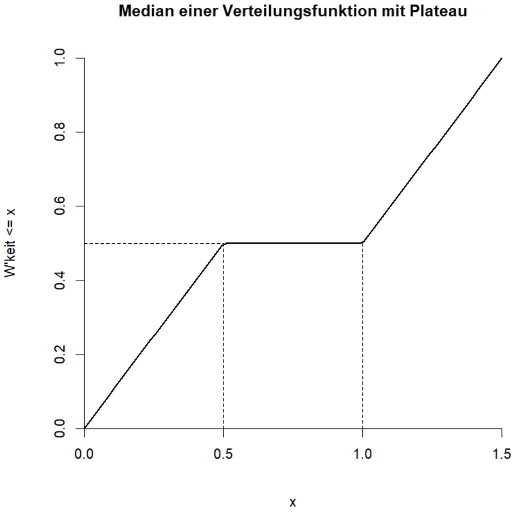
ein Median von F bzw. der zu F gehörigen W'keitsverteilung.

Falls F stetig ist, so gilt $F(x_{\text{med}}) = 1/2$.

Falls F stetig und streng monoton wachsend mit Umkehrfunktion F^{-1} ist, so gilt $x_{\text{med}} = F^{-1}(1/2)$.


Median einer isotonen Verteilungsfunktion
W'keit <= x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
6
x


Median der Augensumme
Vtfkt
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
x


Median einer Verteilungsfunktion mit Plateau
W'keit <= x
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5

Median einer symmetrischen Verteilung

Angenommen, es existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x) \tag{6}$$

Dann ist μ Median von F, denn für $x = 0$ liefert (6), dass gilt:

$$\begin{aligned} F(\mu) &= 1 - F(\mu) \\ \iff 2 \cdot F(\mu) &= 1 \\ \iff F(\mu) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist der Median von $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gleich μ.

Die Quantilsfunktion

Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$.

Dann nennen wir die Funktion

$$\begin{aligned} F^{\leftarrow} : [0,1] &\to \bar{\mathbb{R}} \\ q &\mapsto F^{\leftarrow}(q) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq q\} \end{aligned}$$

die verallgemeinerte Inverse von F bzw. die Quantilsfunktion zu F.

Falls F stetig und streng monoton wachsend ist, so stimmt $F^{\leftarrow}$ mit der Umkehrfunktion F^{-1} überein.

Quantile, Median und 50%-Quantil

Für ein gegebenes F und ein gegebenes $q \in [0, 1]$ nennen wir $F^{\leftarrow}(q)$ das q-Quantil von F.

Jedes q-Quantil ist eindeutig bestimmt.

Das 50%-Quantil ($q = 0.5$) von F ist ein Median von F.

Falls F stetig und streng monoton wachsend ist, so ist der Median $x_{\text{med}}(F)$ von F eindeutig bestimmt und es gilt:

$$x_{\text{med}}(F) = F^{\leftarrow}(0.5) = F^{-1}(0.5)$$

Quartile, Interquartilsabstand

Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ mit Quantilsfunktion $F^{\leftarrow}$.

Dann nennen wir $F^{\leftarrow}(0.25)$ das untere Quartil von F und $F^{\leftarrow}(0.75)$ das obere Quartil von F.

Ferner nennen wir

$$IQR(F) = F^{\leftarrow}(0.75) - F^{\leftarrow}(0.25)$$

den Interquartilsabstand von F.

Der Interquartilsabstand von F ist eine Alternative zur Standardabweichung von F, um die Streuungsbreite der zu F gehörigen W'keitsverteilung zu quantifizieren.

Beispiel: Quantile der Exponentialverteilung

Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ für $\lambda > 0$.

Dann ist die Verteilungsfunktion F_X von X stetig und und streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Somit gilt dann $F_X^{\leftarrow} = F_X^{-1}$ und wir rechnen für gegebenes $q \in [0, 1)$:

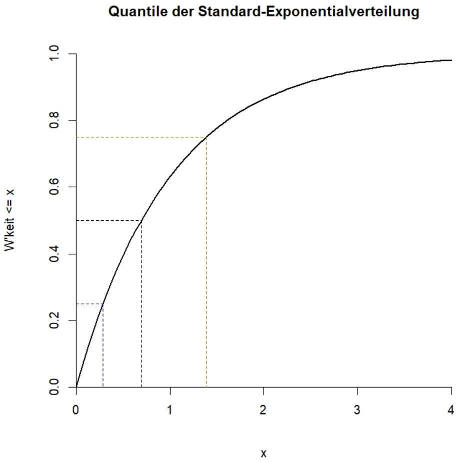
$$\begin{aligned} F_X(t) &= q \\ \iff S_X(t) &= 1 - q \\ \iff \exp(-\lambda t) &= 1 - q \\ \iff t &= -\frac{\log(1-q)}{\lambda} \end{aligned}$$

Quartile und Median der Exponentialverteilung

Somit erhalten wir insbesondere:

$$\begin{aligned} F^{-1}_{\mathsf{Exp}(\lambda)}(0.25) &= \frac{\log(4/3)}{\lambda}, \\ F^{-1}_{\mathsf{Exp}(\lambda)}(0.5) &= \frac{\log(2)}{\lambda}, \\ F^{-1}_{\mathsf{Exp}(\lambda)}(0.75) &= \frac{\log(4)}{\lambda}, \end{aligned}$$

wobei mit $\log$ der natürliche Logarithmus gemeint ist.



Schwarz: Median, Blau: Unteres Quartil, Grün: Oberes Quartil

Übersicht

1 Erwartungswert

2 Momente, Varianz und Standardabweichung

3 Kovarianz und Korrelation

4 Median, Quantile, Interquartilsabstand

5 Integralungleichungen

Markov-Ungleichung

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable, $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende, deterministische Funktion und a eine reelle Konstante mit $h(a) > 0$.

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left[h(X)\right]}{h(a)}$$

Beweis der Markov-Ungleichung

Wegen $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{E}\left[h(X)\right] \geq 0$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h(X)\right] &\geq \mathbb{E}\left[h(X) \cdot \mathbf{1}_{[a,\infty)}(X)\right] \\ &\geq h(a) \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[a,\infty)}(X)\right] \\ &= h(a) \cdot \mathbb{P}(X \geq a). \end{aligned}$$

Division durch $h(a) > 0$ liefert die Aussage.

Korollar zur Markov-Ungleichung

Setzt man in der Markov-Ungleichung h als die Identität auf $[0, \infty)$ an und betrachtet statt X selbst die Zufallsvariable $|X|$, so ergibt sich für $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{a}$$

Wählen wir speziell $a = k \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]$, so ergibt sich:

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq k \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \leq \frac{1}{k}$$

Beispiel zur Markov-Ungleichung

Angenommen, ein fairer Würfel wird 60-mal (unabhängig voneinander) geworfen.
Man gebe eine obere Schranke für die W'keit an, mindestens 30-mal eine Sechs zu würfeln.

Lösung:

Sei X die zufällige Anzahl an gewürfelten Sechsen bei 60 Versuchen. Dann ist $X \sim \text{Bin}(60, 1/6)$ und damit $\mathbb{E}[X] = 60/6 = 10$. Somit liefert die Markov-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \geq 30\right) &= \mathbb{P}\left(X \geq 3 \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Chebyshev-Ungleichung

Setzt man in der Markov-Ungleichung voraus, dass $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ ist und betrachtet man statt X selbst die Zufallsvariable $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$ so erhält man für $a > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

Oftmals benutzt man für a ein Vielfaches von SD(X).

Chernoff-Ungleichung (I)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskret verteilte, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$|X_i| \leq 1 \text{ und } \mathbb{E}[X_i] = 0$$

Sei nun

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ und } \sigma^2 := \mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Chernoff-Ungleichung (II)

Dann gilt für alle $\lambda \in [0, 2\sigma]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \geq \lambda \cdot \sigma) &\leq \exp\left(-\lambda^2/4\right), \\ \mathbb{P}(|S| \geq \lambda \cdot \sigma) &\leq 2 \cdot \exp\left(-\lambda^2/4\right) \end{aligned}$$

Ergebnisse dieses Typs nennt man exponentielle Konzentrationsungleichungen.

Beispiel zur Chernoff-Ungleichung (I)

Gesucht sei eine obere Schranke für die W'keit, bei zehn (unabhängigen) Würfen einer fairen Münze mindestens siebenmal das Ergebnis "Zahl" zu erhalten.

Lösung vermittels Chernoff-Ungleichung:

Jeder einzelne Wurf kann durch eine Bernoulli$(1/2)$-verteilte Zufallsvariable B_i modelliert werden, $1 \leq i \leq 10$. Wir setzen $X_i := B_i - 1/2$, so dass $|X_i| \leq 1$ und $\mathbb{E}[X_i] = 0$ erfüllt sind, $1 \leq i \leq 10$. Nun ist $\sum_{i=1}^{10} X_i = \sum_{i=1}^{10} B_i - 5$, und daher ist

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} B_i \geq 7\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 2\right).$$

Beispiel zur Chernoff-Ungleichung (II)

Ferner ist hier

$$\sigma^2 := \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i) = 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2.5,$$

und daher $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 1.581$.

Somit gilt $2 = \lambda \cdot \sigma$ für $\lambda = 2/\sigma \approx 1.265$.

Anwendung der Chernoff-Ungleichung liefert daher die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} B_i \geq 7\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 2\right) \leq \exp(-1.265^2/4) \approx 67.03\%.$$

Jensen'sche Ungleichung

Es sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit in $\mathbb{R}$ existierendem Erwartungswert und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\mathbb{E}\left[h(X)\right]$ in $\mathbb{R}$ existiert.

Dann gilt:

$$h\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[h(X)\right]$$

Anwendung der Jensen'schen Ungleichung

Sei $p \geq 1$ und X eine reellwertige Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}\left[|X|^p\right]$ endlich ist.

Dann gilt:

$$|\mathbb{E}[X]|^p \leq \mathbb{E}\left[|X|^p\right]$$

Insbesondere ergibt sich für $p = 2$:

$$\mathbb{E}^2[X] \leq \mathbb{E}\left[X^2\right] \iff \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X] \geq 0$$