Kapitel 6: Kodierung

Kodierung von Zeichen

Kodierung von Zahlen

Lernziele

- Festkommadarstellung für positive und negative Zahlen kennen und anwenden können
- Repräsentationsmöglichkeiten für negative Zahlen (Betrag-Vorzeichen, 1er-Komplement, 2er-Komplement) kennen und anwenden können
- Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile der Repräsentationsmöglichkeiten kennen und verstehen
- Gleitkommadarstellung als konzeptionellen Unterschied zur Festkommadarstellung kennen lernen
- Gleitkommadarstellung im IEEE-754 Format kennen und anwenden können
- Arithmetikprinzip für Zahlen in Gleitkommadarstellung kennen und anwenden können

Zahlensysteme

Definition (Stellenwertsystem):
Ein Stellenwertsystem (Zahlensystem) ist ein Tripel $S = (b, Z, \delta)$ mit $b \geq 2, |Z| = b$ und $\delta: Z \rightarrow \{0,1, \dots, b-1\}$ bijektiv

- b heißt auch **Basis** des Stellenwertsystems
- Z ist die Menge der **Ziffern** im Stellenwertsystem
- δ bildet die Ziffern eineindeutig auf die zugehörigen Zahlen ab

Beispiele
- Dualsystem $S_2 : b = 2, Z = \{0,1\}, \delta = id$
- Oktalsystem $S_8 : b = 8, Z = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \delta = id$
- Dezimalsystem $S_{10} : b = 10, Z = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \delta = id$
- Hexadezimalsystem $S_{16} : b = 16, Z = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F\}, \delta_{|\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}} = id, \delta(A) = 10, \delta(B) = 11, \dots, \delta(F) = 15$

Festkommazahlen

Definition (Festkommazahl):
Eine Festkommazahl d ist eine endliche Folge von Ziffern $d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}$ aus der Ziffernmenge eines Stellenwertsystem $S = (b, Z, \delta)$ der Länge $n + 1 + k$. Sie besteht aus $n + 1$, $n \geq 0$, Vorkommastellen und $k \geq 0$ Nachkommastellen. Ist d nicht-negativ, berechnet sich der Wert $< d >$ in S wie folgt: $< d >= \sum_{i=-k}^{n} b^i \cdot \delta(d_i)$.

Schreibweise:

- Zur Anzeige der Trennung zwischen Vor- und Nachkommabereich Setzung eines Kommas hinter d_0: $1011{,}01$
- Zur Anzeige des zugehörigen Stellenwertsystems Angabe der Basis im Index am Ende der Folge: $1011{,}01_2$

Beispiel für $n = 3$, $k = 0$ und $d = 1011$

- $< d_2 >= 11, < d_8 >= 521,$
- $< d_{10} >= 1011, < d_{16} >= 4113$

Negative Festkommazahlen (ab hier: S_2)

Definition (vorzeichenbehaftete Festkommazahl):
Eine Festkommazahl $d = d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}$ wird vorzeichenbehaftet wie folgt interpretiert:

- Betrag und Vorzeichen: $[d]_{BV} = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_{BV} \coloneqq (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i$
- Einerkomplement-Darstellung: $[d]_1 = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_1 \coloneqq \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$
- Zweierkomplement-Darstellung: $[d]_2 = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_2 \coloneqq \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i - d_n 2^n$

Ist $d_n = 1$, ergibt sich $[d]$ zu einem negativem Wert, ist $d_n = 0$, ergibt sich $[d]$ zu $< d >$ und entspricht der vorzeichenlosen Interpretation einer Festkommazahl.

Beispiel für $n = 3$, $k = 0$ und $d = 1011$

- $[d]_{BV} = -3$
- $[d]_1 = 3 - 8 + 1 = -4$
- $[d]_2 = 3 - 8 = -5$

Beispiel für $n = 3$, $k = 0$ und $d = 0011$

- $[d]_{BV} = 3$
- $[d]_1 = 3 - 0 = 3$
- $[d]_2 = 3 - 0 = 3$

Betrag und Vorzeichen

Zur Erinnerung: $[d]_{BV} = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_{BV} \; := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i$

Beispiel mit n=2, k=0:

$\boldsymbol{a}$	000	001	010	011	100	101	110	111
$[\boldsymbol{a}]_{\boldsymbol{BV}}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3

Eigenschaften:

- Symmetrischer Zahlenbereich
- Minimum: $-(2^n - 2^{-k})$
- Maximum: $(2^n - 2^{-k})$
- Zwei Darstellungen für die Null
- Gleicher Abstand benachbarter Zahlen

- Höchstwertiges Bit symbolisiert das Vorzeichen
- Alle niederen Bits repräsentieren den Betrag
- Inverse Zahl erhalten: höchstwertiges Bit komplementieren

Einer-Komplement

Zur Erinnerung: $[d]_1 = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_1 \coloneqq \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$

Beispiel mit n=2, k=0:

$\boldsymbol{a}$	**000**	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
$[\boldsymbol{a}]_{\mathbf{1}}$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0

Eigenschaften:

- Symmetrischer Zahlenbereich
- Minimum: $-(2^n - 2^{-k})$
- Maximum: $(2^n - 2^{-k})$
- Zwei Darstellungen für die Null
- Gleicher Abstand benachbarter Zahlen

- Inverse Zahl erhalten: alle Bits komplementieren

Lemma:
Sei a' die Festkommazahl die aus a durch Komplementieren aller Bits hervorgeht. Dann gilt $[a']_1 = -[a]_1$

Zweier-Komplement

Vorteil des Zweierkomplements:

Schaltkreise zur Realisierung der Addition/ Subtraktion zweier vorzeichenbehafteter Festkommazahlen werden einfach.

Zur Erinnerung: $[d]_2 = [d_n d_{n-1} \dots d_0 \dots d_{-k}]_2 \coloneqq \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \cdot 2^i - d_n 2^n$

Beispiel mit n=2, k=0:

$\boldsymbol{a}$	000	001	010	011	100	101	110	111
$[\boldsymbol{a}]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

Eigenschaften:

- Asymmetrischer Zahlenbereich
- Minimum: -2^n
- Maximum: $(2^n - 2^{-k})$
- Eindeutige Darstellung für die Null
- Gleicher Abstand benachbarter Zahlen

- Inverse Zahl erhalten: alle Bits komplementieren und 2^{-k} addieren

Lemma:
Sei a' die Festkommazahl die aus a durch Komplementieren aller Bits hervorgeht. Dann gilt $[a']_2 + 2^{-k} = -[a]_2$

Probleme bei Festkommazahlen

- Fester Darstellungsbereich
  - keine ganz großen bzw. kleinen Zahlen darstellbar
  - Zahlen mit größtem Absolutbetrag: -2^n und $2^n - 2^{-k}$
  - Zahlen mit kleinstem Absolutbetrag: -2^{-k} und 2^{-k}
- Nicht-Abgeschlossenheit der Operationen
  - $2^{n-1} + 2^{n-1}$ nicht darstellbar
- Assoziativgesetz und Distributivgesetz gelten nicht (wegen Nicht-Abgeschlossenheit)
  - $(2^{n-1}+2^{n-1}) - 2^{n-1} \neq 2^{n-1} + (2^{n-1} - 2^{n-1})$

Gleitkommadarstellung

- Idee: Position des Kommas variabel halten
- Größerer Zahlenbereich bei gleicher Stellenanzahl abdeckbar
- Grundlegende Struktur der Darstellung: $d = (-1)^s \cdot M \cdot 2^E$
  - Vorzeichen S
  - Exponent E
  - Mantisse M
- Anzahl der verfügbaren Bits für Exponent und Mantisse variiert
- Frage: Wie werden Mantissen- und Exponentenbits für M und E interpretiert?
  - Gleitkommadarstellung ist nicht eindeutig: $0{,}111 \times 2^3 = 0{,}0111 \times 2^4$

Normalisierte Gleitkommadarstellung und Mantissenbits

Definition (normalisierte Gleitkommazahl):
Eine Gleitkommazahl (S, M, E) heißt normalisiert, wenn $1 \leq \ M \ < \ 2$, d.h. wenn M von der Form $1{,}m_1 \ldots m_k$ ist.

Definition (Mantissenwert):
Seien $m_1 \ldots m_k$ die Mantissenbits. Dann ergibt sich (bei normalisierter Darstellung) der Mantissenwert M wie folgt: $M = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot 2^{-i}$.

Erkenntnisse:

- Keine Speicherung der 1 in den Mantissenbits („hidden bit“)
- Behandlung der „0“ als Spezialfall

Exponentenbits

Definition (Bias):
Sei n die Anzahl der Exponentenbits. Dann ist der BIAS definiert als: $BIAS = 2^{n-1} - 1$

Definition (Exponentenwert):
Seien $e_0 \dots e_{n-1}$ die Exponentenbits. Dann ergibt sich Exponentenwert E wie folgt: $E = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \cdot 2^i - BIAS$.

Erkenntnisse:

- IEEE-754 schreibt Interpretation der Exponentenbits als vorzeichenlose Zahl vor.
- BIAS stellt Darstellbarkeit negativer Exponenten sicher

Sonderfälle IEEE-754-Standard

- Denormalisierte Zahlen:
  - Alle Exponentenbits sind 0
  - „hidden bit“ in der Mantissendarstellung fällt weg
  - Darstellung von $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot 2^i\right) \cdot 2^{-(BIAS-1)}$
  - Erlaubt Darstellung von kleineren Zahlen als die kleinste darstellbare normalisierte Zahl
- Darstellung der Zahl 0:
  - Mantissenbits 0
  - Exponentenbits 0
- Darstellung des Werts ∞:
  - Mantissenbits 0
  - Exponentenbits 1

IEEE-754-Standard: Zahlenbereich

	Single precision	Double precision
Vorzeichenstellen	1	1
Exponentenstellen	8	11
Mantissenstellen (ohne hidden Bit)	23	52
Bitstellen ingesamt	32	64
Bias	127	1023
Exponentenbereich	$-126\ bis\ 127$	$-1022\ bis\ 1023$
(betragsmäßig) kleinste Zahl (≠0) (normalisiert)	2^{-126}	2^{-1022}
(betragsmäßig) größte Zahl (normalisiert)	$(1-2^{-24})\cdot 2^{128}$	$(1-2^{-53})\cdot 2^{1024}$
(betragsmäßig) kleinste Zahl(≠0) (denormalisiert)	2^{-149}	2^{-1074}
(betragsmäßig) größte Zahl (denormalisiert)	$(1-2^{-23})\cdot 2^{-126}$	$(1-2^{-52})\cdot 2^{-1022}$

IEEE- 754-Standard: Eigenschaften

- Variabler Darstellungsbereich
  - Nicht alle Zahlen sind darstellbar ganz großen bzw. kleinen Zahlen darstellbar
  - Abstand zwischen darstellbaren Zahlen ist nicht identisch
  - Eindeutige Zahlendarstellung bei normalisierten Zahlen
- Nicht-Abgeschlossenheit der Operationen
  - $Max + Max$ nicht darstellbar
- Assoziativgesetz und Distributivgesetz gelten nicht (wegen Nicht-Abgeschlossenheit)
  - $(Max + Max) - Max \neq Max + (Max - Max)$

Prinzipielle Arbeitsweise: Addition von Gleitkommazahlen

Rechenvorschrift

- Angleichung des kleineren an den größeren Exponenten
- Addition der Mantissen
- Normalisierung, Rundung (falls erforderlich)

Beispiel:

$$+(1{,}000)_2 \times 2^{-1} + -(1{,}110)_2 \times 2^{-2} = +(1{,}000)_2 \times 2^{-1} + -(0{,}111)_2 \times 2^{-1}$$

$$= +(0{,}001)_2 \times 2^{-1}$$

$$= +(1{,}000)_2 \times 2^{-4}$$

Prinzipielle Arbeitsweise: Multiplikation von Gleitkommazahlen

Rechenvorschrift

- Multipliziere die Vorzeichen
- Multipliziere die beiden Mantissen
- Addiere die beiden Exponenten und subtrahiere (einmal) den Bias-Wert
- Normalisierung, Rundung (falls erforderlich)

Beispiel

$+(1{,}000)_2 \times 2^{-1+BIAS} \times -(1{,}110)_2 \times 2^{-2+BIAS}$

Multiplikation der Vorzeichen: $0 \oplus 1 = 1$

Multiplikation der Mantissen: $(1{,}000)_2 \times (1{,}110)_2 = (1{,}110)_2$

Addition der Exponenten: $(-1+BIAS)+(-2+BIAS)-BIAS = (-3+BIAS)$

Resultat: $-(1{,}110)_2 \times 2^{-3+BIAS}$

Überblick

Teil 1: Der Rechneraufbau (Kapitel 2-5)	Teil 2: Der Funktionalitätsaufbau (Kapitel 6-12)
• Rechner im Überblick • Pipelining • Speicher • Parallelverarbeitung	• Kodierung • Grundbegriffe, Boolesche Funktionen • Darstellungsmöglichkeiten • Schaltkreise, Synthese, spezielle Schaltkreise