Universität Bremen

FB3: Mathematik/Informatik

Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Übungsblatt: Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt befindet sich eine Sammlung von Aufgaben, die vom Stil und von der Schwierigkeit her auf einer Klausur vorkommen könnten. Die Sammlung deckt auch noch nicht abgehaltene Vorlesungen mit ab.

Übung 1

[**Vorlesung 2**] Zeigt oder widerlegt die folgenden Aussagen:

(a) $n^4 + 3n^2 + 7n \in \mathcal{O}(2^{(\log_2(n))^2})$.

(b) Für alle Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $f + g \in \mathcal{O}(\max\{f, g\})$. Hier ist $f + g$ die Kurzschreibweise für die Funktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) = f(n) + g(n)$ und $\max\{f, g\}$ ist die Kurzschreibweise für die Funktion $h'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h'(n) = \max\{f(n), g(n)\}$.

(c) $3^n \cdot n^2 \in \Omega(n!)$.

Übung 2

[**Vorlesung 3**] Gebt für folgende Rekursionsgleichungen eine geschlossene Form in Θ-Notation an und zeigt die Korrektheit per Induktion. Für beide Rekursionsgleichungen könnt ihr annehmen, dass $T(1) = 1$.

(a) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 3$.

(b) $T(n) = 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2$.

Anmerkung: In der Klausur würde das Mastertheorem auf der Klausur angegeben werden.

Übung 3

[**Vorlesung 4**] Gegeben seien zwei Arrays A und B mit jeweils n positiven natürlichen Zahlen. Ziel ist es, die Elemente in den beiden Arrays so zu permutieren, dass $\prod_{i=1}^{n} A[i]^{B[i]}$ maximiert wird. Gebt einen Algorithmus an, der dieses Problem in Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ löst. Zeigt, dass euer Algorithmus die optimale Lösung für dieses Problem findet und die gewünschte Laufzeit erzielt.

Übung 4

[**Vorlesung 5**] Gegeben sind ein einfacher und ungerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie zwei Knoten $s, t \in V$. Gebt einen Algorithmus an, der in Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ entscheidet, ob es einen Weg von s nach t mit ungerader Länge gibt. Begründet warum euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.

Hinweis: Wir haben die Aufgabe geändert. Es wird jetzt nach einem Weg statt einem Pfad gesucht. Die Lösung für Pfade wird etwas komplizierter.

Übung 5

[Vorlesungen 6 und 7] Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit der Kostenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}$. Sei T ein MST von G. Für welche der folgenden Kostenfunktionen ist T immer noch ein MST von G? Begründet Eure Antworten.

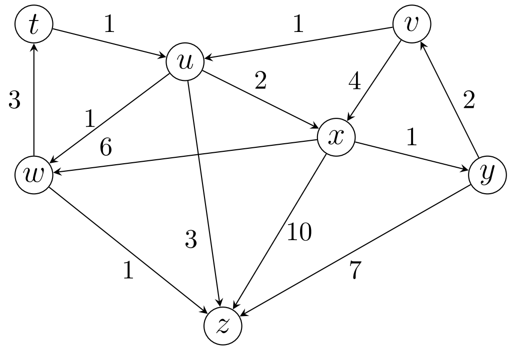
(i) $c_1\colon E \to \mathbb{R}$ mit $c_1(e) = c(e) + 17$ für alle $e \in E$.

(ii) $c_2\colon E \to \mathbb{R}$ mit $c_2(e) = 17 \cdot c(e)$ für alle $e \in E$.

(iii) $c_3\colon E \to \mathbb{R}$ mit $c_3(e) = c(e) \cdot c(e)$ für alle $e \in E$.

Übung 6

[Vorlesung 8] Ermittelt für den abgebildeten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege (und deren Länge) von Startknoten x zu allen anderen Knoten im Graphen. Gebt in nachvollziehbarer Art und Weise die Zwischenschritte an.



Übung 7

[Vorlesung 9] Gegeben sei eine Menge W von natürlichen Zahlen. Für jedes $w \in W$ habt ihr eine unbegrenzte Anzahl an Münzen mit dem Wert w zur Verfügung. Zusätzlich ist eine natürliche Zahl M gegeben, die als Wechselgeld ausgegeben werden soll.

(a) Gebt ein dynamisches Programm an, welches die minimale Anzahl an Münzen berechnet, die benötigt wird, um den Betrag M auszugeben. Es kann vorkommen, dass es nicht möglich ist den Betrag auszugeben, in dem Fall soll ∞ zurückgegeben werden. Die Laufzeit des Algorithmus soll $\mathcal{O}(M \cdot |W|)$ sein. Gebt dabei insbesondere die induktive Definition der DP-Tabelle an.

(b) Begründet warum euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.

(c) Erklärt, wie aus der gefüllten DP-Tabelle berechnet werden kann, welche Münzen ausgegeben werden sollen, um die Anzahl der Münzen zu minimieren.

Übung 8

[Vorlesung 10] Ihr arbeitet bei einem Fahrrad-Hersteller und wollt einen Produktionsplan für die nächsten n Monate erstellen. Für jeden Monat i, kennt ihr den Bedarf d_i an Fahrrädern. Ihr wisst also im voraus, wie viele Fahrräder ihr verkaufen werdet. Ihr müsst nun sicherstellen, dass ihr ausreichend Fahrräder produziert, um den Bedarf in jedem Monat zu decken.

In jedem Monat können eure Angestellten m Fahrräder produzieren, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen. Für jedes zusätzlich produzierte Fahrrad zahlt ihr einen Stückpreis von c Geldeinheiten. Falls am Ende eines Monats noch unverkaufte Fahrräder übrig sind, müsst ihr zusätzliche Lagerungskosten bezahlen. Die Lagerungskosten hängen von der Anzahl der zu lagernden Fahrräder ab und werden durch die Funktion $h(j)$ beschrieben, die für jedes $j \in \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} d_i\}$ angibt, wie viel es kostet j Fahrräder zu lagern. Dabei gilt $h(j) \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq \sum_{i=1}^{n} d_i$ und $h(j) \leq h(j+1)$ für alle $1 \leq j \leq (\sum_{i=1}^{n} d_i) - 1$

Gebt ein dynamisches Programm an, das einen Produktionsplan berechnet, der alle Bedarfe erfüllt und die zusätzlichen Kosten minimiert. Die Laufzeit des Algorithmus soll polynomiell in n und $(\sum_{i=1}^{n} d_i)$ sein. Gebt insbesondere auch die induktive Definition der DP-Tabelle an. Begründet warum euer Algorithmus die optimale Lösung findet und die gewünschte Laufzeit erzielt.

Übung 9

[Vorlesungen 11 und 12] Du leitest ein Bauunternehmen und wurdest beauftragt ein Haus zu renovieren. Für die Renovierung des Hauses ist eine Liste von Aufgaben zu erledigen, die jeweils von genau einer Person bearbeitet werden müssen. Dafür steht ein Team von Angestellten zur Verfügung, doch leider kann nicht jedes Teammitglied jede Aufgabe bearbeiten. Für jede Aufgabe werden bestimmte Fähigkeiten benötigt, die nicht unbedingt jedes Teammitglied besitzt. Wegen der aktuell extremen Hitzewelle schafft es jedes Teammitglied an einem Tag höchstens eine Aufgabe zu bearbeiten. Ziel ist es eine Aufgabenverteilung zu finden, welche es erlaubt an einem Tag möglichst viele Aufgaben zu erledigen. Die folgenden Tabellen spezifizieren das Team, die Aufgaben, und die vorhandenen/benötigten Fähigkeiten.

Aufgabe	Benötigte Fähigkeiten
A1	F1
A2	F2, F3
A3	F3, F4
A4	F4, F5
A5	F6

Teammitglied	Vorhandene Fähigkeiten
TM1	F2, F3, F4
TM2	F2, F3, F4
TM3	F1, F3, F4, F5
TM4	F4, F5, F6
TM5	F4, F5

a) Modelliere das Problem als Optimierungsproblem auf Graphen. Zeichne dafür den resultierenden Graphen und beschrifte ihn.

b) Um welches Problem aus der Vorlesung handelt es sich? Gib eine formale Definition an.

c) Betrachte die folgende Aufgabenverteilung: TM2 bearbeitet A2, TM3 bearbeitet A3 und TM4 bearbeitet A4. Ist diese Aufgabenverteilung optimal? Gib ein allgemeines Optimalitätskriterium an, anhand dessen man entscheiden kann ob eine gegebene Aufgabenverteilung optimal ist.

d) Benutze einen aus der Vorlesung bekannten Algorithmus um ausgehend von der Aufgabenverteilung aus Aufgabenteil c) eine optimale Aufgabenverteilung zu finden. Der Algorithmus soll die Aufgabenverteilung aus c) als Startlösung verwenden, darf sie aber im Verlauf seiner Ausführung verändern. Gib dabei in nachvollziehbarer Weise Zwischenschritte und Erläuterungen an.